

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

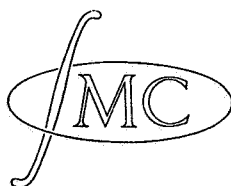
AFDELING ZUIVERE WISKUNDE

WN 7

Over de homogeniteit van een
compacte totaalgeordende topologische ruimte

door

M.A. Maurice



Oktober 1963

Over de homogeniteit van een ctgtr*

§1. Lemma II.1.1: Een homogene ctgtr X voldoet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma.

Bewijs:

Zij $\{x_i\}_{i < \omega}$ een aftelbaar oneindige verzameling in X , daar X compact is, heeft deze verzameling een verdichtingspunt, bijv. y ; y is dan de limiet van een aftelbare rij, en omdat X homogeen is, is elk punt van X , en i.h.b. $a = \inf X$, de limiet van een aftelbare rij. Voor a betekent dit, dat in dit punt een aftelbare locale basis bestaat; daar X homogeen is, geldt dit voor elke $x \in X$; maar dat betekent dat X aan het 1^e aftelbaarheidsaxioma voldoet.

Stelling II.1.1: Als X een ctgtr is, en $|X| > \aleph_1$, dan is X niet homogeen.

Bewijs:

Op grond van stelling I.4.3.1. gevolg, voldoet X niet aan het 1^e aftelbaarheidsaxioma; en dus is (lemma II.1.1) X niet homogeen.

Lemma II.1.2: Een homogene ctgtr X is 0-dimensionaal.

Bewijs:

Zij Y een component van X . Indien $|Y| > 1$, zij dan $a = \inf Y$, $b = \sup Y$, en zij c zodanig dat $a < c < b$. Als nu C_x de component in X aanduidt, waarin x ligt, is blijkbaar $C_a \setminus \{a\} = Y \setminus \{a\}$ een samenhangende deelruimte van X , terwijl $C_c \setminus \{c\} = Y \setminus \{c\}$ een niet-samenhangende deelruimte van X is. Dan is echter X niet homogeen. Dus $|Y| = 1$; d.w.z. dat X 0-dimensionaal is.

§2. Hulpstelling: Als α en $\beta = \omega^\delta$ aftelbare limietordinaalgetallen zijn, en $\alpha \leq \beta$, dan bestaat een stijgende rij $(u_i)_{i < \alpha}$ van het type α , zodanig dat $\lim_{i < \alpha} u_i = \beta$.

*) Dit is een vervolg op WN 6; een verwijzing naar St I.4.3.1 is een verwijzing naar WN 6, st. 4.3.1.; enz.

Bewijs:

1. We merken eerst op, dat bij elk aftelbaar limietordinaalgetal β een rij $(\sigma_i)_{i < \omega}$ bestaat, zodanig dat $\lim_{i < \omega} \sigma_i = \beta$.

Immers: zij $(v_i)_{i < \omega}$ de, als type ω welgeordende, verzameling van ordinaalgetallen $< \beta$; een monotoon stijgende deelrij van de rij $(v_i)_{i < \omega}$ is een rij $(\sigma_i)_{i < \omega}$ met de gevraagde eigenschappen.

2. Voorts laten we zien, dat het voldoende is, de stelling te bewijzen voor ordinaalgetallen $\alpha \leq \beta$, die geschreven kunnen worden als $\alpha = \omega^\gamma$ ($1 \leq \gamma \leq \delta$).

Immers: als $\alpha = \omega^{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k}$, $n_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, k$) $\delta \geq \gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_k > 0$, dan kan men schrijven $\alpha = \alpha' + \omega^{\gamma_k}$; als nu $(v_i)_{i < \omega^{\gamma_k}}$ een stijgende rij is, met limiet ω^{δ} , dan is ook $(\mu_i)_{i < \alpha}$ een stijgende rij met limiet ω^{δ} , als $\mu_i = i$ voor $i < \alpha'$ en $\mu_i = \alpha' + v_i$ voor $\alpha' \leq i < \alpha$.

3. We bewijzen nu de stelling door transfiniete inductie naar δ .

(i) $\delta=1$ impliceert $\beta=\omega$, $\alpha=\omega$, en de bewering is triviaal.

(ii) Zij de stelling bewezen voor $\delta < \epsilon$

(ii,1) Zij $\epsilon = \delta_1 + 1$.

Dan is $\beta = \omega^\epsilon = \omega^{\delta_1 + 1} = \omega^{\delta_1} \cdot \omega = \beta_1 \cdot \omega$.

Als $\alpha = \omega^\gamma = \beta$ is de bewering triviaal; zij dus $\alpha = \omega^\gamma < \beta$;

dan is $\alpha \leq \beta_1$.

Op grond van de inductie-aanname is β_1 de limiet van een stijgende rij $(v_i)_{i < \alpha}$ van het type α ; β_1 is echter ook de limiet van een stijgende rij $(\lambda_j)_{j < \omega}$ van het type ω ; indien nu

$$\begin{cases} \mu_i = v_i & \text{voor alle } i \text{ met } v_i < \lambda_0 \\ \mu_i = \beta_1 \cdot j + v_i & \text{voor alle } i \text{ met } \lambda_{j-1} \leq v_i < \lambda_j, \end{cases}$$

dan is $(\mu_i)_{i < \alpha}$ een stijgende rij van het type α , en $\lim_{i < \alpha} \mu_i = \beta$

(ii.2) Zij ϵ een limietgetal.

Dan is ϵ de limiet van een stijgende rij $(\epsilon_n)_{n < \omega}$.

En ook is dan

$$\beta = \lim_{n < \omega} \omega^{\epsilon_n}.$$

Als $\alpha = \omega^\gamma = \beta$ is de bewering triviaal; zij dus $\alpha = \omega^\gamma < \beta$.

Indien nu

$$\begin{cases} V_0 = \{v/v < \omega^\epsilon\} \\ V_n = \{v/\omega^{\epsilon_{n-1}} \leq v < \omega^{\epsilon_n}\} \quad (n=1,2,\dots), \end{cases}$$

dan bestaat dus een N , zodanig dat

$$\text{type } V_n = \omega^{\epsilon_n} \geq \alpha \quad \text{voor } N \leq n < \omega$$

a. Als $\alpha = \omega^\gamma$, $\gamma = \gamma_1 + 1$, dan is $\alpha = \omega^{\gamma_1+1} = \omega^{\gamma_1} \cdot \omega = \alpha_1 \cdot \omega$.

Voor $N \leq n < \omega$ is elke ω^{ϵ_n} de limiet van een stijgende rij $(v_i^{(n)})_{i < \alpha_1}$ van het type α_1 .

Definieert men nu voor $N \leq n < \omega$

$$\mu_i = \omega^{\epsilon_{n-1}} + v_i^{(n)} \quad \text{voor } \alpha_1 \cdot (n-N) \leq i < \alpha_1 \cdot (n-N+1),$$

dan is $(\mu_i)_{i < \alpha}$ een rij van het type α , en $\lim_{i < \alpha} \mu_i = \beta$.

b. Als $\alpha = \omega^\gamma$ en γ is limietgetal, dan is γ de limiet van een stijgende rij $(\gamma_n)_{n < \omega}$, en ook is

$$\alpha = \lim_{n \in \omega} \omega^{\gamma_n}.$$

Voor $N \leq n < \omega$ is nu $\omega^{\gamma_n} < \alpha \leq \omega^{\epsilon_n}$, en dus is ω^{ϵ_n} de limiet van een stijgende rij $(v_i^{(n)})_{i < \omega^{\gamma_n}}$ van het type ω^{γ_n} .

Definieert men nu voor $N \leq n < \omega$

$$\mu_i = \omega^{\epsilon_{n-1}} + v_i^{(n)} \quad \text{voor } \omega^{\gamma_{n-N}} \leq i < \omega^{\epsilon_{n-N+1}},$$

dan is $(\mu_i)_{i < \alpha}$ een rij van het type α , en $\lim_{i < \alpha} \mu_i = \beta$.

Lemma II.2.1: Zij $X = Z_{\omega} \alpha$ met $|\alpha| \leq \aleph_1$.

1. Als p geen sprongpunt is, of als p een rechtersprongpunt is, geldt: $\{x/x \leq p\} \hookrightarrow Z_{\omega} \alpha$
2. Als p geen sprongpunt is, of als p een linkersprongpunt is, geldt: $\{x/p \leq x\} \hookrightarrow Z_{\omega} \alpha$

Bewijs:

1. Zij $L = \{p / \exists i_0 < \omega^\alpha : p_i = 0 \text{ voor } i \geq i_0\}$
 $R = \{p / \exists i_0 < \omega^\alpha : p_i = 1 \text{ voor } i \geq i_0\}$

In beide gevallen zullen we onder i_0 steeds de kleinste index verstaan met de verlangde eigenschap.

Het is duidelijk, dat een linkersprongpunt (rechttersprongpunt) tot L (tot R) behoort, en dat een punt van L (van R), dan en slechts dan een linkersprongpunt (rechttersprongpunt) is, als i_0 een niet-limietgetal is.

(i) Zij $p \in R$.

laat $(m_\lambda)_\lambda$ de welgeordende rij van indices zijn, waarvoor $p_{m_\lambda} = 1$; dan is $(m_\lambda)_\lambda$ een rij van het type ω^α .

Definieer nu

$$V_0 = \{x / x \leq p_0 p_1 \dots 0 \overrightarrow{1111\dots} \}$$

$$V_\lambda = \{x / p_0 p_1 \dots 1 \overrightarrow{000\dots} \leq x \leq p_0 p_1 \dots 0 \overrightarrow{1111\dots} \}$$

als λ een niet-limietgetal is

$$= \{x / p_0 p_1 \dots 0000\dots \overrightarrow{\leq x \leq p_0 p_1 \dots 0 \overrightarrow{111\dots}} \}$$

als λ een limietgetal is, en $n_\lambda = \lim_{i < \lambda} m_i$.

Definieer ook

$$W_0 = \{x / x \leq 0 \overrightarrow{1111\dots} \}$$

$$W_\lambda = \{x / 111\dots 1 \overrightarrow{0000\dots} \leq x \leq 111\dots 0 \overrightarrow{1111\dots} \}$$

als λ een niet-limietgetal is

$$= \{x / 1111\dots 0000\dots \overrightarrow{\leq x \leq 1111\dots 01111\dots} \}$$

als λ een limietgetal is.

Het is duidelijk, dat de verzamelingen V_λ, W_λ ($0 \leq \lambda < \omega^\alpha$) alle gelijkgeordend zijn met Z_ω^α .

Hieruit volgt, dat ook de geordende verenigingen

$$\bigcup_{\lambda < \omega} V_\lambda \quad \text{en} \quad \bigcup_{\lambda < \omega} W_\lambda,$$

dus ook $\{x/x \leq p\}$ en Z_ω^α ,

gelijkgeordend zijn.

(ii) Op analoge wijze bewijst men, dat voor $p \in L$ geldt:

$$\{x/p \leq x\} \sim Z_\omega^\alpha$$

(iii) Hieruit volgt dat voor $p \in L$, $q \in R$, $p < q$ geldt:

$$\{x/p \leq x \leq q\} \sim Z_\omega^\alpha$$

2. We bewijzen vervolgens:

(i) Als β een aftelbaar limietordinaalgetal is, en $\beta \leq \omega^\alpha$, dan is Z_ω^α te schrijven als geordende vereniging van het type β van verzamelingen A_i ($0 \leq i \leq \beta$), waarbij $A_i \sim Z_\omega^\alpha$ voor $0 \leq i < \beta$ en $|A_\beta| = 1$.

Aldus:

Op grond van de hulpstelling bestaat een stijgende rij

$(\mu_i)_{i < \beta}$ zodanig dat $\lim_{i < \beta} \mu_i = \omega^\alpha$.

Zij nu

$$A_0 = \{x/x \leq 111 \dots 0 \overset{\mu_0^e \text{ plaats}}{\rightarrow} 111 \dots\}$$

$$A_i = \{x/ 111 \dots 10000 \dots \overset{\mu_{i-1}^e \text{ plaats}}{\rightarrow} x \leq 111 \dots 0 \overset{\mu_i^e \text{ plaats}}{\rightarrow} 1111 \dots\}$$

$$\text{als } i \text{ een niet-limietgetal is}$$

$$= \{x/1111 \dots 00000 \dots \overset{\mu_i^e \text{ plaats}}{\rightarrow} x \leq 1111 \dots 0 \overset{\mu_i^e \text{ plaats}}{\rightarrow} 1111 \dots\}$$

$$A_\beta = \{11111 \dots\} \text{ als } i \text{ een limietgetal is, en } \mu_i = \lim_{j < i} \mu_j$$

Dan voldoen de verzamelingen A_i ($0 \leq i \leq \beta$) aan de gestelde eisen.

(ii) Als β een aftelbaar limietordinaalgetal is, en $\beta \leq \omega^\alpha$, dan is Z_ω^α te schrijven als geordende vereniging van het type β^* van verzamelingen A_i ($0 \leq i \leq \beta$), waarbij $A_i \sim Z_\omega^\alpha$ voor $0 \leq i < \beta$, en $|A_\beta| = 1$.

Bewijs als boven

3. (i) Zij nu p geen sprongpunt, en zij $(m_\lambda)_{\lambda < \beta}$ de welgeordende rij van indices, waarvoor $p_{m_\lambda} = 1$; dan is β een limietgetal.

Definieer nu

$$B_0 = \{x/x \leq p_0 p_1 \dots \overset{m_0^e \text{ plaats}}{\downarrow} 0 \text{ } 1111 \dots\}$$

$$B_i = \{x/ \overset{m_{i-1}^e \text{ plaats}}{\downarrow} p_0 p_1 \dots 1 \text{ } 0000 \dots \leq x \leq p_0 p_1 \dots \overset{m_i^e \text{ plaats}}{\downarrow} 0 \text{ } 1111 \dots\}$$

$$= \{x/ \overset{n_i^e \text{ plaats}}{\downarrow} p_0 p_1 \dots 0 \text{ } 000 \dots \leq x \leq p_0 p_1 \dots \overset{m_i^e \text{ plaats}}{\downarrow} 0 \text{ } 1111 \dots\}$$

als i een niet-limietgetal is

als i een limietgetal is, en $n_i = \lim_{j < i} m_j$

$$B_\beta = \{p\}$$

Op grond van 1. en 2. (i) volgt nu gemakkelijk, dat

$$\{x/x \leq p\} \cup Z_\omega \alpha.$$

- (ii) Op dezelfde wijze kan men aantonen, dat, als p geen sprongpunt is, $\{x/p \leq x\} \cup Z_\omega \alpha.$

Lemma II.2.2: Zij $X = Z_\omega^* \alpha$; $|\alpha| \leq \aleph_0$

Als $\inf X < p < \sup X$, dan geldt

$$\{x/x \leq p\} \cup \{x/p \leq x\} \cup Z_\omega^* \alpha$$

Bewijs: analoog aan dat van lemma II.2.1.

Stelling II.2.1: Indien $|\alpha| \leq \aleph_0$ is $Z_\omega \alpha$ een homogene topologische ruimte.

Bewijs:

1. We merken eerst op: als $I \in Z_\omega \alpha$ en I is een clopen interval in $Z_\omega \alpha$, waarvoor geldt $I \cup Z_\omega \alpha$, dan is ook $(Z_\omega \alpha \setminus I) \cup Z_\omega \alpha$.
Immers: als $p = \inf I$, $q = \sup I$, dan is ten hoogste één der verzamelingen $I_p = \{x/x < p\}$, $I_q = \{x/x > q\}$ leeg; indien $I_p \neq \emptyset$ (en/of $I_q \neq \emptyset$) dan is $I_p \cup Z_\omega \alpha$ (en/of $I_q \cup Z_\omega \alpha$), op grond van lemma II,2.1;

dan is ook (in alle drie de mogelijke gevallen) $I_p \cup I_q \sim Z_\omega^\alpha$.

2. Kies nu $p, q \in Z_\omega^\alpha$; $p \neq q$.

Dan is (resp. q) de doorsnede van een dalende aftelbare rij van clopen intervallen I_n (resp. J_n); z.b.d.a. $I_1 \cap J_1 = \emptyset$.

Zij f_0 een monotone afbeelding van $Z_\omega^\alpha \setminus I_1$ op $Z_\omega^\alpha \setminus J_1$;

Zij f_n een monotone afbeelding van $I_n \setminus I_{n+1}$ op $J_n \setminus J_{n+1}$.

($n=1, 2, 3, \dots$).

Dan is de functie f die gedefinieerd wordt door

$$f(x) = f_n(x) \text{ als } x \in I_n \setminus I_{n+1}$$

($n=0, 1, 2, 3, \dots$; $I_0 = Z_\omega^\alpha$); $f(p) = q$, een topologische afbeelding van Z_ω^α op zichzelf, die voldoet aan $f(p) = q$.

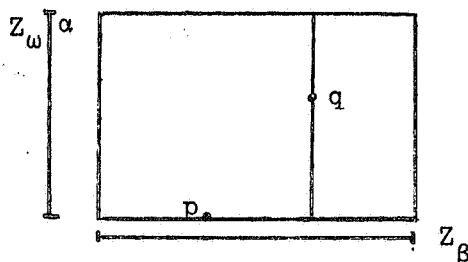
Dit betekent dat Z_ω^α homogeen is.

Stelling II.2.2: Als $Z_\omega^{\alpha**}$ de topologische ruimte is, die uit $Z_\omega^{\alpha*}$ ontstaat door identificatie van $\inf Z_\omega^{\alpha*}$ en $\sup Z_\omega^{\alpha*}$, dan is $Z_\omega^{\alpha**}$ homogeen.

Bewijs: volgt uit lemma II.2.2.

§3. Stelling II.3.1: Indien $\gamma = \beta + \omega^\alpha$, en $\beta \geq \omega^\alpha$, dan is Z_γ niet homogeen.

Bewijs: Zonder beperking der algemeenheid zij $\beta = \delta + \omega^\epsilon$, met $\epsilon \geq \alpha$.



(i) Kies $p = (p_i)_{i < \gamma}$ zodanig dat

$$\begin{cases} \forall i < \beta \quad \exists j, k : (i < j, k < \beta \text{ en } p_i = 0, p_k = 1) \\ \forall i \geq \beta : p_i = 0 \end{cases}$$

Het is duidelijk, dat iedere omgeving $\mathcal{O}_p$ van p een deelruimte bevat, die gelijkgeordend is met $Z_{\omega^\epsilon + \omega^\alpha}$.

Op grond van lemma I.3.4.1 geldt dus

$$\theta(\overset{\#}{O}_p) \geq \omega^\varepsilon + \omega^\alpha$$

(ii) Kies $q = (q_i)_{i < \gamma}$ zodanig dat

$$\forall i \exists j, k: (i < j, k < \gamma \text{ en } p_i = 0, p_k = 1).$$

Dan heeft q omgevingen O_q , die gelijkgeordend zijn met Z_ω^α .

Dan is echter

$$\theta(\overset{\#}{O}_q) = \omega^\alpha$$

(iii) $Z_\beta \cdot Z_\omega^\alpha$ is dus niet homogeen; hetzelfde geldt dan voor

$$Z_{\beta + \omega}^\alpha = Z_\gamma.$$